Geometría Proyectiva

Bloque I : Subespacios Proyectivos

(1) a) $3x - y + 1 = 0 \equiv L$

Expresamos L en coordenadas homogéneas

$$3\frac{x_0}{x_2} - \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_2} = 0 \longrightarrow 3x_0 - x_1 + x_2 = 0$$

Punto impropio (pto del infinito) : $P_{\infty,\bar{L}}$

para $x_2 = 0 \longrightarrow 3x_0 - x_1 = 0 \Longrightarrow P_{\infty,\bar{L}} = (1:3:0)$

b) $x = 2 \equiv L \longrightarrow \bar{L} \equiv \frac{x_0}{x_2} - 2\frac{x_2}{x_2} = 0 \longrightarrow x_0 - 2x_2 = 0$

Para $x_2 = 0 \Longrightarrow x_0 = 0 \qquad P_{\infty,\bar{L}} = (0:1:0)$

c) $2x + 3y = 0 \equiv L \longrightarrow \bar{L} \equiv 2\frac{x_0}{x_2} + 3\frac{x_1}{x_2} = 0 \longrightarrow 2x_0 + 3x_1 = 0$

$P_{\infty,\bar{L}} = (-3:2:0)$

d) $x - 2y - 3 = 0 \equiv L \longrightarrow \bar{L} \equiv \frac{x_0}{x_2} - 2\frac{x_1}{x_2} - 3\frac{x_2}{x_2} = 0 \longrightarrow x_0 - 2x_1 - 3x_2 = 0$

$P_{\infty,\bar{L}} = (2:1:0)$

(2) a) $\begin{cases} x = 3z + 1 \\ y = -z + 4 \end{cases} \equiv S \longrightarrow \bar{S} \equiv \begin{cases} \frac{x_0}{x_3} = 3\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_3} \\ \frac{x_1}{x_3} = -\frac{x_2}{x_3} + 4\frac{x_3}{x_3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_0 = 3x_2 + x_3 \\ x_1 = -x_2 + 4x_3 \end{cases}$

$P_{\infty,\bar{S}} = (3:-1:1:0)$

b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 2 \end{cases} \equiv S \longrightarrow \bar{S} \equiv \begin{cases} 2\frac{x_0}{x_3} - \frac{x_1}{x_3} + 3\frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_3} \\ \frac{x_0}{x_3} + 3\frac{x_1}{x_3} - \frac{x_2}{x_3} = 2\frac{x_3}{x_3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x_0 - x_1 + 3x_2 = x_3 \\ x_0 + 3x_1 - x_2 = x_3 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_2 = \lambda} \begin{cases} x_0 = \frac{-8}{7}\lambda \\ x_1 = \frac{5}{7}\lambda \\ x_2 = \lambda \end{cases} \qquad P_{\infty,\bar{S}} = (-8:5:7:0)$

(3) $\Pi : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 1 \end{cases} \longrightarrow \bar{\Pi} : \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = x_4 \\ x_0 + 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = x_4 \end{cases} \qquad x_4 = 0 \longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_3 = \mu]{x_2 = \lambda} \begin{cases} x_0 = \lambda + \mu \\ x_1 = -2\lambda - 3\mu \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \mu \end{cases}$

$A = (1:-2:1:0:0)$

$B = (1:-3:0:1:0)$

4) $\bar{S} = P(S^0)$

$$\boxed{\bar{S} = \begin{cases} x_0 = \lambda + 2\mu \\ x_1 = -\lambda + \mu \\ x_2 = 2\lambda + \mu \end{cases}} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_0 \\ -1 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_0 \\ 0 & 3 & x_1+x_0 \\ 0 & -3 & x_2-2x_0 \end{array}\right) \longrightarrow x_2 - 2x_0 + x_1 + x_0 = 0$$

$$\boxed{\bar{S} \equiv -x_0 + x_1 + x_2 = 0}$$

$$S \cap r \begin{cases} -x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 + x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \qquad P = (0 : 1 : -1)$$

5) Posición relativa: $\mathbb{P}^2 = P(\mathbb{R}^3) = \mathbb{A}^2 \cup H_\infty$

a) $\begin{cases} x_0 - x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_0 + x_2 = 0 \\ x_0 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ Hallemos el rango: $rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3$

$Dim_v = 3 - rg = 0 \Rightarrow$ se cortan 2 a 2

Hallamos los puntos donde las rectas se cortan.

$\begin{cases} x_0 - x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_0 + x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow A = (1 : -2 : -3)$

$\begin{cases} 3x_0 + x_2 = 0 \\ x_0 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow C = (-1 : -4 : 3)$

$\begin{cases} x_0 - x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow B = (1 : 1 : 0)$

b) $\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 + 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_0 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ $rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$

$Dim_v = 3 - rg = 1 \Rightarrow$ Se cortan en un punto proyectivo. Hallamos el punto donde se cortan

$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad P = (-3 : 2 : 1)$

6) Plano π que pasa por $(1:0:-1:3)$, $(2:1:-1:1)$ y $(1:1:0:1)$ de $\mathbb{P}^3 = P(\mathbb{R}^4)$

$$\pi = \begin{cases} x_0 = \lambda + 2\mu + \gamma \\ x_1 = \mu + \gamma \\ x_2 = -\lambda - \mu \\ x_3 = 3\lambda + \mu + \gamma \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x_0 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 \\ -1 & -1 & 0 & x_2 \\ 3 & 1 & 1 & x_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x_0 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2+x_0 \\ 0 & -5 & -2 & x_3-3x_0 \end{array}\right) \longrightarrow \pi \equiv x_2 + x_0 - x_1 = 0$$

Recta r que pasa por $(2:1:3:0)$ y $(0:1:0:1)$ de $\mathbb{P}^3$

$$r \equiv \begin{cases} x_0 = 2\lambda \\ x_1 = \lambda + \mu \\ x_2 = 3\lambda \\ x_3 = \mu \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x_0 \\ 1 & 1 & x_1 \\ 3 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_2 \\ 2 & 0 & x_0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1-x_3 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_1-x_3-3x_2 \\ 0 & 0 & x_1-x_3-2x_0 \end{array}\right) \longrightarrow r \equiv \begin{cases} x_1 - x_3 - 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 - 2x_0 = 0 \end{cases}$$

⑦ a)

$$r \equiv \begin{cases} x_0 = 5\lambda + \mu \\ x_1 = -2\lambda + 3\mu \\ x_2 = 4\lambda + 2\mu \\ x_3 = 7\lambda + \mu \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x_0 = 4\lambda - 3\mu \\ x_1 = \lambda - 3\mu \\ x_2 = 2\lambda + \mu \\ x_3 = \lambda \end{cases} \qquad \mathbb{P}^3 = P(\mathbb{R}^4) = \mathbb{A}^3 \cup \Lambda_\infty$$

Determinamos el rango de los 4 vectores de ambas rectas

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 4 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -2 \\ 0 & -11 & 6 & -3 \\ 0 & 12 & 11 & 3 \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow dim_v = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \text{se cruzan}$$

b) $\bar{r} \equiv \begin{cases} x_0 - 5x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_0 - 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \bar{s} \equiv \{P + Q$ con $P = (7:5:-2:0)$ y $Q = (1:3:0:-2)$

Sacamos 2 puntos de $\bar{r}$ $\quad A = (0:1:1:2)$ y $B = (10:2:0:-11)$

Estudiamos el rango

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 10 & 2 & 0 & -11 \\ 7 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -28 & 0 & 3 \\ 0 & -16 & -2 & 14 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 28 & -9 \\ 0 & 0 & 14 & -28 \end{pmatrix} = 4$$

$Dim_v = 4 - 4 = 0 \Rightarrow$ Las rectas se cruzan

⑧ $\mathbb{P}^3$ $\quad r$ pasa por $\overset{A}{(5:4:1:6)}$ y $\overset{B}{(1:-1:2:3)}$

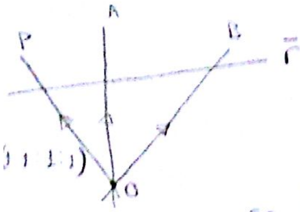
$\quad s$ pasa por $\underset{C}{(4:5:-1:2)}$ y $\underset{D}{(3:1:0:1)}$

Estudiamos el rango

$$rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -6 & -8 \\ 0 & 9 & -9 & -9 \\ 0 & 9 & -9 & -10 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 9 & -9 & -10 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

$\Rightarrow dim_v = 4 - rg = 0 \Rightarrow$ Las rectas se cruzan

• Comprobamos que $P = (1:1:1:1)$ no está en r ni en s:



Si los 3 puntos $\{A, B, P\}$ son l.i. $\Rightarrow P$ no está en r

Igual para con s

$$rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 9 & -9 & -10 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow P \notin r$$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -6 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow P \notin s$$

(9) Posición relativa en $\mathbb{P}^4$ de

$P=(1:1:0:1:1)$ $\quad L\equiv\begin{cases} x_0-x_1-x_2-x_3=0\\ x_1-x_3-x_4=0\end{cases}$ $\quad M\equiv\begin{cases} x_0=\mu\\ x_1=\lambda+\mu\\ x_2=-\lambda\\ x_3=\mu\\ x_4=\lambda+\mu\end{cases}$

$\vec{L}$ 3d de $\mathbb{R}^5$ $\quad$ $\vec{M}$ plano de $\mathbb{R}^5$ $\quad$ $\vec{P}$ recta vectorial de $\mathbb{R}^5$

$\bar{L}$ plano de $\mathbb{P}^4$ $\quad$ $\bar{M}$ recta de $\mathbb{P}^4$ $\quad$ $\bar{P}$ punto proyectivo de $\mathbb{P}^4$

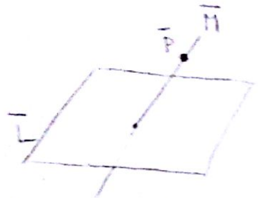
1º Vamos a estudiar la posición relativa entre $\bar{L}$ y $\bar{M}$

$$L\equiv\begin{cases} x_0=\lambda+\delta+\mu\\ x_1=\lambda\\ x_2=\delta\\ x_3=\mu\\ x_4=\lambda-\mu\end{cases} \quad rg\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\1&0&0&1&-1\\1&0&1&0&0\\1&1&0&1&1\\0&1&-1&0&1\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&-1&0&1&0\\0&-1&1&0&-1\\0&0&0&1&0\\0&1&-1&0&1\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&-1&0&1&0\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&-1&1&1\end{pmatrix}=4$$

$\mathrm{Dim}_v = 5 - rg = 1 \Longrightarrow$ Se corta en una recta vectorial, es decir, en un punto proyectivo

2º Vamos a comprobar si el pto proyectivo $\bar{P}$ está contenido en $\bar{L}$, en $\bar{M}$ o en ambos

El pto pertenece a la recta $\bar{M} \Longrightarrow$



(10) $\bar{r}\equiv\begin{cases} x_0-x_4=0\\ x_1-x_3=0\\ x_2=0\end{cases}$ $\quad P=(1:1:1:1:0)$ $\quad \mathbb{P}^4=P(\mathbb{R}^5)=\mathbb{A}^4\cup H_\infty$

$\bar{w}_1=(1:1:0:1:1)$

$\bar{\pi}=L\{\bar{w}_1,\bar{w}_2,P\}$ con $\bar{w}_1$ y $\bar{w}_2\in\bar{r}$ $\quad \bar{w}_2=(1:0:0:0:1)$

$$\bar{\pi}\equiv\begin{cases} x_0=\lambda+\mu+\delta\\ x_1=\lambda+\delta\\ x_2=\delta\\ x_3=\lambda+\delta\\ x_4=\lambda+\mu\end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x_0\\1&0&1&x_1\\0&0&1&x_2\\1&0&1&x_3\\1&1&0&x_4\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x_0\\0&-1&0&x_1-x_0\\0&0&1&x_2\\0&-1&0&x_3-x_0\\0&0&-1&x_4-x_0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&\\0&-1&0&\\0&0&1&\\0&0&0&x_3-x_0-x_1+x_0\\0&0&0&x_4-x_0+x_2\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \bar{\pi}\equiv\begin{cases} x_1-x_3=0\\ x_0-x_2-x_4=0\end{cases}$$

• Buscar un 3d en $\mathbb{R}^5$ $\vec{\pi}'$ que corte con $\vec{\pi}$ en una recta $\vec{s}=(1:0:0:0:1)$

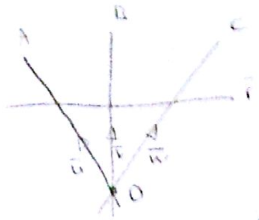
$$rg\begin{pmatrix}1&1&0&1&1\\1&1&1&1&0\\1&0&0&0&1\\a&b&c&d&e\\f&g&h&i&j\end{pmatrix}=5 \longrightarrow rg\begin{pmatrix}1&1&0&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&-1&0&-1&0\\a&b&c&d&e\\f&g&h&i&j\end{pmatrix}=5$$

$\bar{u}=(0:0:0:1:0)$

$\bar{v}=(0:0:0:0:1)$

$\bar{\pi}'=L\{\bar{u},\bar{v},\bar{s}\}$ $\quad \bar{\pi}'\equiv\begin{cases} x_0=\lambda\\ x_1=0\\ x_2=0\\ x_3=\mu\\ x_4=\lambda+\dots\end{cases} \longrightarrow \bar{\pi}'\equiv\begin{cases} x_1=x_2=0\\ x_4-x_0-x_3=0\end{cases}$

(11) a) $\{(1:2:3), (1:1:-2), (2:1:-7)\}$



$\{A, B, C\}$ alineados $\Longleftrightarrow$ $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ l.d. $\Rightarrow$ $r_g = 2$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & -15 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow \{A, B, C\} \text{ están alineados}$$

b) $\{(1:2:-1), (2:1:0), (0:-1:3)\}$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 4 \Longrightarrow \{A, B, C\} \text{ no alineados}$$

c) $\{(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1), (1:1:1)\}$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Longrightarrow \text{No alineados}$$

(12) Vamos a estudiar el rango de esos 4 puntos

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4 \rightarrow \overline{S} = \mathbb{R}^4 \Rightarrow \overline{S} = \mathbb{P}^3$$